Contrôle continu de mécanique

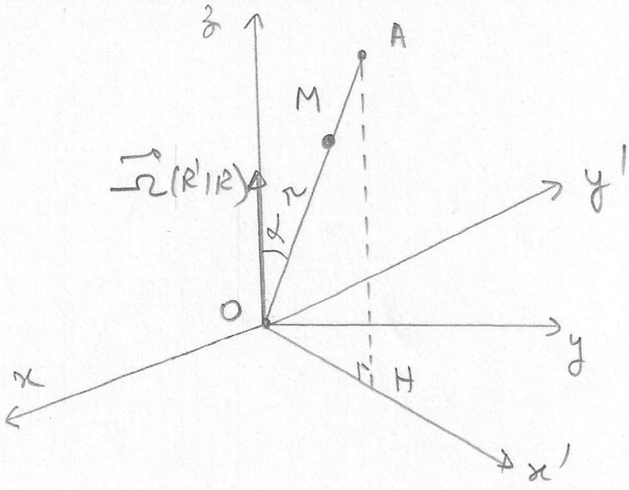
L'usage des calculatrices est interdit.

(Durée : 30 minutes)

NOM :	**Prénom :**	**Groupe :**	***Note (/20) :***

Bille en mouvement dans un tube en rotation

Dans un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$ considéré comme galiléen, un tube *OA*, de section négligeable, est en rotation autour de l'axe *Oz* avec la vitesse angulaire constante ω. Ce tube est incliné d'un angle α constant par rapport à la verticale. On associe au tube le repère $\mathcal{R}'\left(O,\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_z}\right)$ tel que, *H* étant le projeté orthogonal de *A* dans le plan (xOy), $\vec{e_{x'}} = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$. Un point *M*, de masse *m*, peut se mouvoir *sans frottement* dans le tube, et on note *r* la distance de *O* à *M*.
On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur terrestre.



a) Sur un schéma, représenter les deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, et faire figurer explicitement, la distance *r*, l'angle α et le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, dont on précisera la norme et la direction.

$\vec{\Omega}(R'/R) = \omega\vec{e}_z$

b) Réaliser le bilan des forces dans chacun des deux repères à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: donner leurs définitions mathématiques puis les expliciter de la manière la plus simple. On pourra, si on le veut, utiliser le vecteur unitaire $\vec{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA}$ et la base $\left(\vec{e_r},\vec{e_\alpha},\vec{e_{y'}}\right)$.

Ds R : $\Sigma\vec{F}(M/R) = \Sigma\vec{F}^{\text{vraies}} = \vec{P} + \vec{R} = (-mg\vec{e}_z) + (R_\alpha\vec{e}_\alpha + R_{y'}\vec{e}_{y'})$

(mvt sans frottements ⇒ $\vec{R} \perp$ déplacement ⇒ $\vec{R} \perp \vec{e}_r$).

Ds R' : $\Sigma\vec{F}(M/R') = \Sigma\vec{F}^{\text{vraies}} + \vec{F_{ie}}(M,R'/R) + \vec{F_{ic}}(M,R'/R)$.

$$\vec{F_{ie}}(M,R'/R) = -m\Big[\underbrace{\vec{a}(O'\in R'/R)}_{=\vec{0},\ O'\equiv O} + \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R}_{=\vec{0}\text{ car }\omega\text{ cte}} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R)\times\left(\vec{\Omega}(R'/R)\times\overrightarrow{O'M}\right)\Big]$$

$$= -m\omega^2 r\,\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = +m\omega^2 r\sin\alpha\,\vec{e}_{x'}$$

$$\vec{F_{ic}}(M,R'/R) = -2m\vec{\Omega}(R'/R)\times\vec{v}(M/R')$$

$$= -2m\omega\vec{e}_z \times \dot{r}\vec{e}_r = -2m\omega\dot{r}\sin\alpha\,\vec{e}_{y'}$$

c) Après projection selon la direction $\vec{e_r}$ de la Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD), déterminer la **position d'équilibre** r_{eq} du point matériel M dans $\mathcal{R}'$.

Equilibre $\Rightarrow r = cte \Rightarrow \vec{v}(M/R') = \vec{0} \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\vec{a}(M/R') = \vec{0}$.

$\Rightarrow -mg\vec{e}_z + R_\alpha \vec{e}_\alpha + R_{y'}\vec{e}_{y'} + m\omega^2 r \sin\alpha\, \vec{e}_{x'} + \vec{0} = \vec{0}$

Proj suivant $\vec{e}_r \Rightarrow -\cancel{m}g\cos\alpha + \cancel{m}\omega^2 r \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow r_{eq} = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$

d) M étant à l'équilibre r_{eq}, la vitesse angulaire de la tige est brusquement réduite à la valeur constante $\dfrac{\omega}{2}$ à un instant pris comme origine des temps, et la distance r va diminuer. ~~Réécrire~~ Écrire la RFD sous forme dans $\mathcal{R}'$! vectorielle, puis la projeter suivant $\vec{e_r}$. En déduire l'équation différentielle du mouvement.

$$-mg\vec{e}_z + (R_\alpha \vec{e}_\alpha + R_{y'}\vec{e}_{y'}) + m\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 r\sin\alpha\,\vec{e}_{x'} - 2m\left(\frac{\omega}{2}\right)\dot{r}\sin\alpha\,\vec{e}_{y'} = m\ddot{r}\vec{e}_r.$$

$$-\cancel{m}g\cos\alpha + \cancel{m}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 r\sin^2\alpha = \cancel{m}\ddot{r}$$

$$\ddot{r} - \left(\frac{\omega\sin\alpha}{2}\right)^2 r = -g\cos\alpha \iff \ddot{r} - \Omega^2 r = -g\cos\alpha \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\omega\sin\alpha}{2}$$

$$r(t) = A\,\mathrm{ch}\,\Omega t + B\,\mathrm{sh}\,\Omega t + \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2}$$

$\dot{r}(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$r(t=0) = r_{eq} \Rightarrow A + \dfrac{g\cos\alpha}{\Omega^2} = r_{eq} \Rightarrow A = r_{eq} - \dfrac{g\cos\alpha}{\Omega^2} = \dfrac{-3g\cos\alpha}{4\Omega^2}$

Donc $r(t) = \dfrac{g\cos\alpha}{\Omega^2}\left[1 - \dfrac{3}{4}\mathrm{ch}\,\Omega t\right]$

e) Quel est le temps t_o mis par M pour atteindre O ?

$r(t_0) = 0 \iff \mathrm{ch}\,\Omega t_0 = \dfrac{4}{3}$

$\iff t_0 = \dfrac{1}{\Omega}\,\mathrm{Arcch}\,\dfrac{4}{3}$